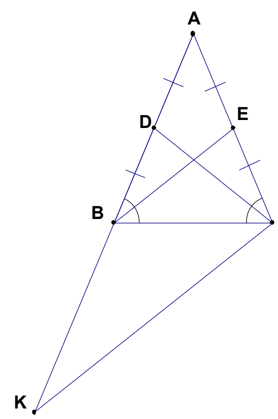
NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN THCS

Trong toán học có rất nhiều bài toán có rất nhiều cách giải. Với bài viết này tác giả xin được đề cập đến một số cách giải bài toán cấp THCS thông qua việc vẽ đường phụ, Đây là các cách giải được khai thác theo các hướng khác nhau trên cơ sở tính chất đường trung bình của tam giác, nhằm phát huy tính sáng tạo cho học sinh nhằm giúp các em hứng thú hơn trong việc học và làm toán. Tác giả bài viết mong nhận được sự đóng góp ý kiến, nhận xét của các thầy cô, bạn đọc trong cả nước nhằm ngày càng hoàn thiện hơn.

<u>Bài toán :</u> Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến CD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm K sao cho BK = BA. Chứng minh rằng CD = $\frac{1}{2}$CK [1]

Giải:Ở đây xin được giới thiệu 10 cách giải bài toán trên.



H.1

<u>Cách 1:</u> (Hình 1)

Gọi E là trung điểm của AC.

Có BE là đường trung bình của ΔAKC => BE = $\frac{1}{2}$KC (1)

Xét ΔBDC và ΔCEB có:

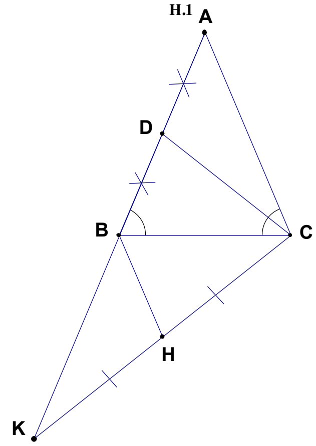
BD = CE (vì BD = $\frac{1}{2}$AB; CE = $\frac{1}{2}$AC mà AB = AC); Cạnh BC chung;

$\widehat{DBC} = \widehat{ECB}$ (vì ΔABC cân tại A);

Vậy ΔBDC = ΔCEB (c.g.c);

Suy ra CD = BE (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra CD = $\frac{1}{2}$CK (đ.p.c.m)



H.2

<u>Cách 2:</u> (Hình 2)

Gọi H là trung điểm của KC. BH là đường trung bình của ΔAKC => BH = $\frac{1}{2}$AC

Xét ΔBDC và ΔBHC có:

BD = BH (vì BD = $\frac{1}{2}$AB; BH = $\frac{1}{2}$AC mà AB = AC);

$\widehat{HBC} = \widehat{DBC}$ vì $\widehat{DBC} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{HBC}$ (do so le trong, BH//AC);

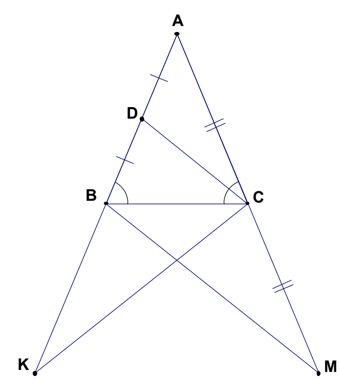
BC cạnh chung;

Vậy ΔBDC = ΔBHC (c.g.c)

Suy ra CH = DC (hai cạnh tương ứng); (1)

Mà H là trung điểm của KC nên CH = $\frac{1}{2}$CK (2).

Từ (1) và (2) suy ra: CD = $\frac{1}{2}$CK.



<u>Cách 3:</u> (hình bên)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm M sao cho CA = CM; CD là đường trung bình của ΔABM => DC = $\frac{1}{2}$BM (1) Xét ΔKBC và ΔMCB có:

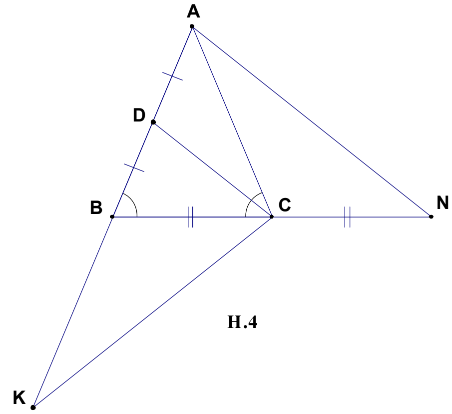
BC cạnh chung; $\widehat{KBC} = \widehat{MCB}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$);

[1] Trích Nâng cao và phát triển toán 7 Nhà xuất bản Giáo dục.

KB = MC (vì KB = AB; MC = AC; AB = AC);
Vậy ΔKBC = ΔMCB (c.g.c) => KC = MB (hai cạnh tương ứng) (2).

Từ (1) và (2) suy ra DC = $\frac{1}{2}$ CK. (đ.p.c.m);

<u>Cách 4:</u> (hình 4)



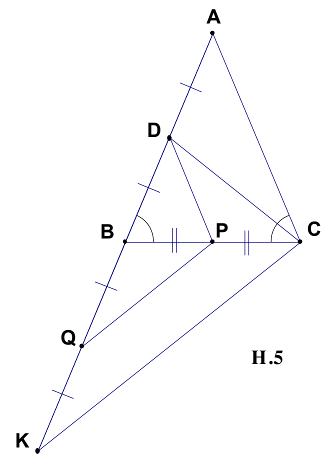
H.4

Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho CB = CN; Ta có: DC là đường trung bình của ΔABN => CD = $\frac{1}{2}$AN (1);

Xét ΔKBC và ΔACN có:
BC = CN; $\widehat{KBC} = \widehat{ACN}$
(vì $\widehat{KBC} = 180^0 - \widehat{ABC}$; $\widehat{ACN} = 180^0 - \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$)
KB = AC (cùng bằng AB);
Vậy ΔKBC = ΔACN (c.g.c) => CK = AN (hai cạnh tương ứng) (2);

Từ (1) và (2) suy ra: CD = $\frac{1}{2}$CK. (đ.p.c.m);

<u>Cách 5:</u> (hình 5)



H.5

Gọi P; Q lần lượt là trung điểm của BC và BK;

Có DP là đường trung bình của ΔABC => DP = $\frac{1}{2}$AC = $\frac{1}{2}$AB = DB;

DP // AC => $\widehat{DPB} = \widehat{ACP}$ (cùng bù với $\widehat{DPC}$); Theo giả thiết $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
(ΔABC cân tại A); $\widehat{DPB} = \widehat{DBP}$ mà
$\widehat{QBP} = 180^0 - \widehat{DBP}$; $\widehat{DPC} = 180^0 - \widehat{DPB}$ => $\widehat{QBP} = \widehat{DPC}$
Xét ΔQBP và ΔDPC có:

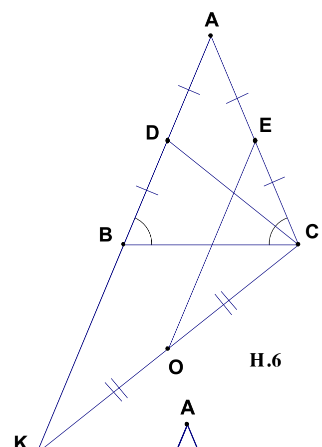
QB = DP; $\widehat{QBP} = \widehat{DPC}$ (chứng minh trên); BP = CP (cùng bằng $\frac{1}{2}$BC);

Vậy ΔQBP = ΔDPC (c.g.c) => DC = QB (1);

Mặt khác QP là đường trung bình của ΔKBC nên QP = $\frac{1}{2}$CK (2);

Từ (1) và (2) suy ra: CD = $\frac{1}{2}$CK (đ.p.c.m);

<u>Cách 6</u>: (Hình 6).



H.6

Gọi E; O lần lượt là trung điểm của AC và KC; OE là đường trung bình của ΔACK nên OE = $\frac{1}{2}$AK mà AK = 2AB = 2AC => OE = AB = AC;

Xét ΔCDA và ΔOCE có:

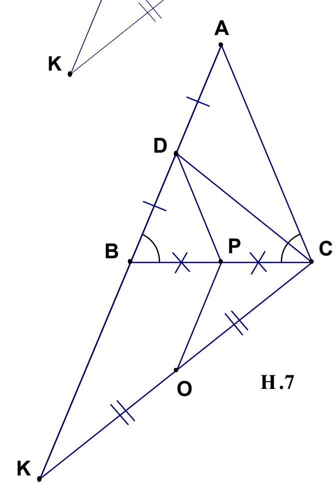
AD = CE (cùng bằng $\frac{1}{2}$AC); OE = CA; $\widehat{DAC} = \widehat{CEO}$ (đồng vị, OE // AD);

Vậy ΔCDA = ΔOCE (c.g.c) => OC = CD; (1)

Mặt khác O là trung điểm CK nên OC = $\frac{1}{2}$CK (2)

Từ (1) và (2) suy ra CD = $\frac{1}{2}$CK. (đ.p.c.m);

<u>Cách 7:</u> (hình 7)



H.7

Gọi P; O lần lượt là trung điểm của BC và CK;

DP là đường trung bình của ΔABC nên DP = $\frac{1}{2}$AC

OP là đường trung bình của ΔCBK nên OP = $\frac{1}{2}$BK

Theo bài ra, ta có BK = AC nên DP = OP;

$\widehat{OPB} = \widehat{DBP}$ (so le trong, OP//DB); $\widehat{DBP} = \widehat{ACP}$ và $\widehat{ACP} = \widehat{DPB}$ $\Rightarrow \widehat{OPB} = \widehat{DPB} \Rightarrow \widehat{OPC} = \widehat{DPC}$

Xét ΔDPC và ΔOPC có:

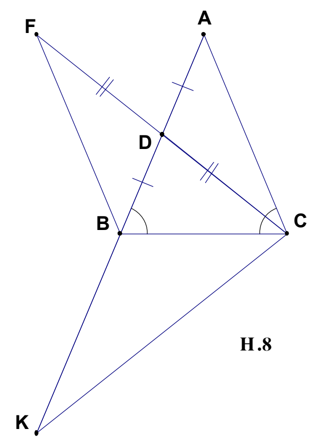
DP = OP (c/m trên);

$\widehat{OPC} = \widehat{DPC}$ (c/m trên);

Cạnh PC chung

Vậy ΔDPC = ΔOPC (c.g.c) => OC = CD mà OC = $\frac{1}{2}$CK => CD = $\frac{1}{2}$CK. (đ.p.c.m).

<u>Cách 8:</u> (hình 8)



H.8

Trên tia đối của tia DC lấy điểm F sao cho DF = DC;

Xét ΔBDF và ΔADC có:

DF = DC; DA = DB; $\widehat{FDB} = \widehat{CDA}$ (hai góc đối đỉnh);

suy ra: ΔBDF = ΔADC (c.g.c) => BF = AC mà AC = BK nên BF = BK;

Ta lại có:

$\widehat{FBC} + \widehat{ACB} = 180^0$ (BF // AC nên hai góc trong cùng phía bù nhau);

$\widehat{KBC} + \widehat{ABC} = 180^0$ (hai góc kề bù)

mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ΔABC cân tại A) => $\widehat{KBC} = \widehat{FBC}$

Xét ΔFBC và ΔKBC có:

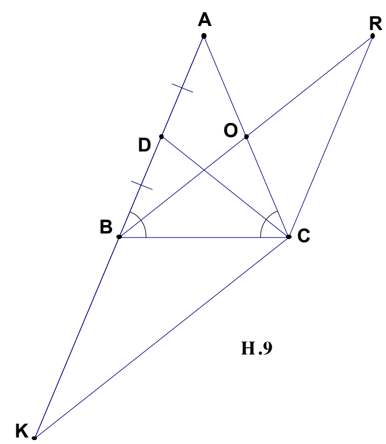
FB = KB (c/m trên);

$\widehat{KBC} = \widehat{FBC}$;

BC cạnh chung;

Vậy ΔFBC = ΔKBC (c.g.c) => FC = CK => 2CD = CK => CD = $\frac{1}{2}$CK. (đ.p.c.m);

<u>Cách 9:</u> (hình 9);



H.9

Từ B kẻ đường thẳng song song với CK cắt AC tại O; Từ C kẻ đường thẳng song song với BK cắt BO kéo dài tại R;

Dễ dàng chứng minh được CR = BK = AB; BR = CK;

Xét ΔROC và ΔBOA có:

$\widehat{CRO} = \widehat{ABO}$ (so le trong, CR//AB); CR = AB;

$\widehat{RCO} = \widehat{BAO}$ (so le trong, CR//AB) Suy ra: ΔROC = ΔBOA (g.c.g);

=> OA = OC = $\frac{1}{2}$AC = = $\frac{1}{2}$AB; OB = OR; => OR = $\frac{1}{2}$BR = $\frac{1}{2}$CK; (1);

Xét ΔADC và ΔCOR có:

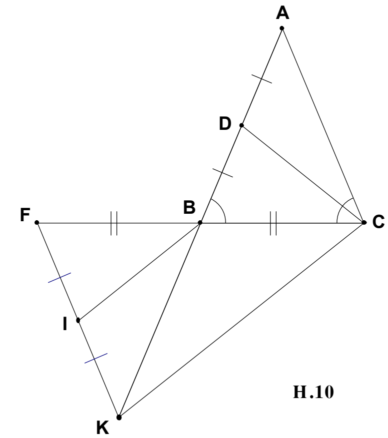
AD = OC (cùng bằng $\frac{1}{2}$AB); $\widehat{RCO} = \widehat{DAO}$ (so le trong, CR//AB);

CR = AC (cùng bằng AB);

Vậy ΔADC = ΔCOR (c.g.c); => OR = CD (2);

Từ (1) và (2) => CD = $\frac{1}{2}$CK. (đ.p.c.m);

<u>Cách 10:</u> (hình 10)



H.10

Trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho BF = BC; Nối FK; Gọi I là trung điểm của FK;
Xét ΔFBK và ΔCBA có:
$FB = CB$; $\widehat{FBK} = \widehat{CBA}$ (hai góc đối đỉnh); AB = KB (giả thiết);
nên $\Delta FBK = \Delta CBA$ (c.g.c) => FK = AC
mà AB = AC => FK = AB => $\frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}AB$
=> FI = DB; (1)
Theo bài ra, ta có: $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{BFI}$ $\Rightarrow \widehat{BFI} = \widehat{ABC} = \widehat{DBC}$ (2)
Xét ΔFBI và ΔBCD có:
FB = BC;
$\widehat{BFI} = \widehat{DBC}$ (theo (2));
FI = BD (theo (1));
Vậy $\Delta FBI = \Delta BCD$ (c.g.c) => BI = CD (3);
Mặt khác do I; B lần lượt là trung điểm của FK và FC => IB là đường trung bình của ΔKFC
=> $BI = \frac{1}{2}CK$ (4); Từ (3) và (4) suy ra: $CD = \frac{1}{2}CK$. (đ.p.c.m);

Chú ý: *Trong các cách vẽ đường phụ, có thể lập luận theo nhiều cách khác nhau để chứng minh được* $CD = \frac{1}{2}CK$.

Nguyễn Văn Chương
Trường THCS Nguyễn Hàm Ninh
Ba Đồn - Quảng Trạch - Quảng Bình
Điện thoại: 0935187009